Opción A

Ejercicio 1 opción A, modelo 1 del 2015

[2'5 puntos] Sea $f : R \rightarrow R$ la función dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Halla los coeficientes a, b, c y d sabiendo que f presenta un extremo local en el punto de abscisa x = 0, que (1,0) es punto de inflexión de la gráfica de f y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3.

Solución

Sea $f : R \rightarrow R$ definida por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$.
Halla a, b, c y d sabiendo que f presenta un extremo local en el punto de abscisa x = 0, que (1,0) es punto de inflexión de la gráfica de f y que la pendiente de la recta tangente en dicho punto es -3.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$. Esta función es polinómica por tanto continua y derivable las veces que sean necesarias, en R.

Como tiene un extremo local en el punto de abscisa x = 0, sabemos que **$f'(0) = 0$**.
Como que (1,0) es punto de inflexión de la gráfica de f, sabemos que **$f''(1) = 0$,** por punto de inflexión y **$f(1) = 0$,** por ser punto de la gráfica de f.
Como la pendiente de la recta tangente en dicho punto (1,0) es -3, tenemos **$f'(1) = -3$**.

$f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$; $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$; $f''(x) = 6ax + 2b$.
De $f'(0) = 0$, tenemos $0 = c$, por tanto **$c = 0$.**
De $f''(1) = 0$, tenemos $0 = 6a + 2b$, por tanto **$b = -3a$.**
De $f(1) = 0$, tenemos $0 = a + b + d$, de donde **$a + b + d = 0$.**
De $f'(1) = -3$, tenemos $-3 = 3a + 2b$. Como $b = -3a$ tenemos $-3 = 3a + 2(-3a) \rightarrow -3 = -3a$, luego **$a = 1$** y **$b = -3(1) = -3$.**
Entrando con $a = 1$ y $b = -3$ en $0 = a + b + d \rightarrow 0 = 1 - 3 + d$, luego **$d = 2$.** $\rightarrow$

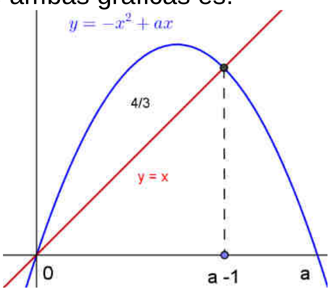
La función pedida es $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

Ejercicio 2 opción A, modelo 1 del 2015

[2'5 puntos] Calcula el valor de a > 1 sabiendo que el área del recinto comprendido entre la parábola $y = -x^2 + ax$ y la recta $y = x$ es $\frac{4}{3}$

Solución

Veamos los puntos de corte de la parábola $y = -x^2 + ax$ con la recta $y = x$.
Resolvemos $-x^2 + ax = x$, es decir $x^2 + ax - x = 0 = x\cdot(-x + a - 1)$, de donde las abscisas de los puntos de corte son $x = 0$ y $x = a - 1$.
La recta $y = x$ es la bisectriz del primer y tercer cuadrante.
La parábola $y = -x^2 + ax$ es de la forma $\cap$, pues el número que multiplica a x^2 es negativo, y corta al eje OX en x = 0 y x = a (soluciones de $-x^2 + ax = 0$), por tanto la parábola está por encima de la bisectriz y = x.
Aunque no lo piden un esbozo de ambas gráficas es:



Me dicen que el área encerrada por ambas gráficas e 4/3, luego:
Área = $4/3 = \int_0^{a-1} (-x^2 + ax - (x))dx = [-x^3/3 + ax^2/2 - x^2/2]_0^{a-1}$ =

$= [(-(a - 1)^3/3 + a(a - 1)^2/2 - (a - 1)^2/2) – (0)] =$
$= -(a^3 – 3a^2 + 3a – 1)/3 + a(a^2 – 2a + 1)/2 – (a^2 -2a + 1)/2 =$
$= [-2(a^3 – 3a^2 + 3a - 1) + 3a(a^2 – 2a + 1) - 3(a^2 -2a + 1)] / 6 = (a^3 - 3a^2 + 3a - 1)/6$. Igualando esta expresión a 4/3 tenemos:
$(a^3 - 3a^2 + 3a - 1)/6 = 4/3 = 8/6$, de donde $a^3 - 3a^2 + 3a - 9 = 0$. Se observa que a = 3 es una solución. (División por Ruffini)

	1	-3	3	-9
3		3	0	9
	1	0	3	0

Luego **a = 3** es una solución de la ecuación $a^3 - 3a^2 + 3a - 9 = 0$, y queda de cociente de la división $a^2 + 3 = 0$, que no tiene soluciones reales, es decir:
$a^3 - 3a^2 + 3a - 9 = (a - 3)\cdot(a^2 + 3)$, por tanto el valor pedido es **a = 3.**

Ejercicio 3 opción A, modelo 1 del 2015

Considera el sistema dado por AX = B

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

a) [0’75 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.
b) [0’75 puntos] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solución.
c) [1 punto] Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones.
Halla todas las soluciones en dichos casos.

Solución

Considera el sistema dado por AX = B con $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ \alpha - 2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad y \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

a)
Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene solución única.

La matriz de los coeficientes del sistema AX = B es $A = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{pmatrix}$, y la matriz ampliada es

$$A^* = \begin{pmatrix} \alpha & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha - 2 \\ 3 & 4 & \alpha & 3 \end{pmatrix}.$$

El sistema tiene solución única si rango(A) = rango(A*) = 3 con lo cual $det(A) = |A| \neq 0$.

$$det(A) = |A| = \begin{vmatrix} \alpha & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & \alpha \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = \alpha(\alpha - 8) – 0 + 3(4 + 1) = \alpha^2 - 8\alpha + 15.$$

De $\alpha^2 - 8\alpha + 15 = 0$ obtenemos $\alpha = 3$ y $\alpha = 5$.
Si $\boldsymbol{\alpha \neq 3}$ y $\boldsymbol{\alpha \neq 5}$, $det(A) \neq 0$ con lo cual rango(A) = rango(A*) = 3 y **el sistema tiene solución única.**
b)
Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema no tiene solución.

El sistema no tiene solución si rango(A) $\neq$ rango(A*). *Veamos los rangos de A y de A* para los valores* $\alpha = 3$ *y* $\alpha = 5$.

Si $\alpha = 3$, A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y A* = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 - 0 \neq 0$, rango(A) = 2

En A* como $\begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= 3(3 - 4) - 0 + 3(2 - 1) = -3 + 3 = 0$, rango(A*) = 2.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, el sistema tiene más de una solución**, que es el caso (c) que resolveremos después.

Si $\alpha = 5$, A = $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}$ y A* = $\begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{pmatrix}$.

En A como $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 - 0 \neq 0$, rango(A) = 2

En A* como $\begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix}$ Adjuntos primera columna $= 5(3 - 12) - 0 + 3(6 - 1) = -45 + 15 = -30 \neq 0$, rango(A*) = 3.

Como **rango(A) = 2 $\neq$ rango(A*) = 3, el sistema es incompatible y no tiene ninguna solución**.

c)

Determina, si existen, los valores de α para los que el sistema tiene al menos dos soluciones. Halla todas las soluciones en dichos casos.

Hemos visto que este caso se daba para **$\alpha = 3$**, A = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$ y A* = $\begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{pmatrix}$.

Como **rango(A) = rango(A*) = 2 < número de incógnitas, el sistema tiene más de una solución**. Como *el rango es dos tomamos sólo dos ecuaciones, las dos primeras que son con las que he formado el menor de orden dos distinto de cero*.

$3x + 2y - z = 1$

$y + 2z = 1$. Tomo $z = \lambda \in R$, con lo cual $y = 1 - 2\lambda$.

De $3x + 2(1 - 2\lambda) - (\lambda) = 1 \rightarrow 3x + 2 - 4\lambda - \lambda = 1 \rightarrow 3x = -1 + 5\lambda$, de donde $x = -1/3 + (5\lambda)/3$, y **la solución del sistema es $(x,y,z) = (-1/3 + (5\lambda)/3,\ 1 - 2\lambda,\ \lambda)$ con $\lambda \in R$.**

Ejercicio 4 opción A, modelo 1 del 2015

Considera los puntos B(1,2,-3), C(9,-1,2), D(5 0,-1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a) [1'25 puntos] Calcula el área del triángulo cuyos vértices son B, C y D.

b) [1'25 puntos] Halla un punto A en la recta r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A.

Solución

Considera los puntos B(1,2,-3), C(9,-1,2), D(5 0,-1) y la recta $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$

a)

Calcula el área del triángulo cuyos vértices son B, C y D.

Sabemos que el área de un triángulo BCD es la mitad del área del paralelogramo que determinan su lados BC y BD, es decir la mitad del módulo (|| ||) del vector producto vectorial (x) de los vectores **BC** y **BD**, luego el Área del triángulo es = (1/2)·||**BC**x**BD**||.

$$\mathbf{BC} = (8,-3,5);\ \mathbf{BD} = (4,-2,2);\ \mathbf{BC}\text{x}\mathbf{BD} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 8 & -3 & 5 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \mathbf{i}(-6+10) - \mathbf{j}(16-20) + \mathbf{k}(-16+12) = (4,4,-4)$$

||**BC**x**BD**|| = $\sqrt{(4)^2+(4)^2+(4)^2}$ = $\sqrt{48}$ = $4\sqrt{3}$

Área del triángulo es = (1/2)·||**BC**x**BD**|| = (1/2)·$4\sqrt{3}$ u^2 = $2\sqrt{3}$ u^2.

b)

Halla un punto A en la recta r de forma que el triángulo ABC sea rectángulo en A.

Ponemos la recta "r" en vectorial o paramétrica, tomamos un punto genérico de "r", el A, y le imponemos la condición de ser rectángulo en A, es decir los vectores **BA** y **CA** son perpendiculares, por tanto su producto escalar (•) es cero. **BA•CA** = 0.

En $r \equiv \begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ y - z = 0 \end{cases}$ tomando $z = \lambda \in R$, tenemos $y = \lambda$ y $x = -1-\lambda$. La ecuación vectorial de "r" es $(x,y,z) = (-1-\lambda,\lambda,\lambda)$ con $\lambda \in R$, que es el punto genérico A de r, es decir $A(-1-\lambda,\lambda,\lambda)$.

BA = $(-1-\lambda-1,\lambda-2,\lambda+3) = (-2-\lambda,-2+\lambda,3+\lambda)$

CA = $(-1-\lambda-9,\lambda+1,\lambda-2) = (-10-\lambda,1+\lambda,-2+\lambda)$

BA•CA = 0 → $(-2-\lambda,-2+\lambda,3+\lambda)\bullet(-10-\lambda,1+\lambda,-2+\lambda)$ =

= $(-2-\lambda)\cdot(-10-\lambda) + (-2+\lambda)\cdot(1+\lambda) + (3+\lambda)\cdot(-2+\lambda)$ =

= $(\lambda^2+12\lambda+20) + (\lambda^2-\lambda-2) + (\lambda^2+\lambda-6) = 3\lambda^2+12\lambda+12 = 0 = \lambda^2+4\lambda+4 = 0$, de donde:

$\lambda = \dfrac{-4 \pm \sqrt{16-16}}{2} = \dfrac{-4 \pm \sqrt{0}}{2} = \dfrac{-4 \pm 0}{2} = -2 \pm 0$, $\lambda = -2$ (doble) , tenemos un solo valor de λ y por tanto tenemos un sólo punto de la recta "r" que verifica la condición.

Para λ **= -2** tenemos el **punto A(**-1-(-2)), (-2)), (-2)) = **A(1, -2, -2).**

Opción B

Ejercicio 1 opción B, modelo 1 del 2015 (Ejercicio 1A de Septiembre de 2006)

Sea f : R → R la función definida por $f(x) = x^2 - |x|$.

a) [0'5 puntos] Estudia la derivabilidad de f.

b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de f.

c) [1 punto] Calcula los extremos relativos de f (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

Solución

(a)

$f(x) = x^2 - |x| = \begin{cases} x^2 + x & \text{si } x < 0 \\ x^2 - x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$, teniendo en cuenta la definición de $|x| = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ x & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

$x^2 + x$ es una función continua y derivable en todo $\Re$, en particular en $x < 0$

$x^2 - x$ es una función continua y derivable en todo $\Re$, en particular en $x > 0$

Veamos la continuidad de f(x) en x = 0, es decir si verifica

$f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x)$

$f(0) = 0$; $\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^2 - x) = 0$; $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0} (x^2 + x) = 0$

Como $f(0) = \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^-} f(x) = 0$, **la función f(x) es continua en x = 0 y por tanto en**

todo R.

Estudiamos ya la derivabilidad de f(x), en particular en x =0

$f(x) = \begin{cases} x^2 + x & \text{si} \quad x < 0 \\ x^2 - x & \text{si} \quad x \geq 0 \end{cases}$; $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

Veamos la derivabilidad en x = 0, es decir si f '(0 +) = f '(0 -). Vemos la continuidad de la derivada.

$f'(0^+) = \lim_{x\to 0^+} f'(x) = \lim_{x\to 0} (2x - 1) = -1$; $f'(0^-) = \lim_{x\to 0^-} f'(x) = \lim_{x\to 0} (2x + 1) = +1$

Como f '(0 +) ≠ f '(0 -), **f(x) no es derivable en x = 0** por lo cual **es derivable en R - {0}.**
(b) y (c)

Para ver la monotonía estudiamos la 1ª derivada $f'(x) = \begin{cases} 2x + 1 & \text{si} \quad x < 0 \\ 2x - 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$.

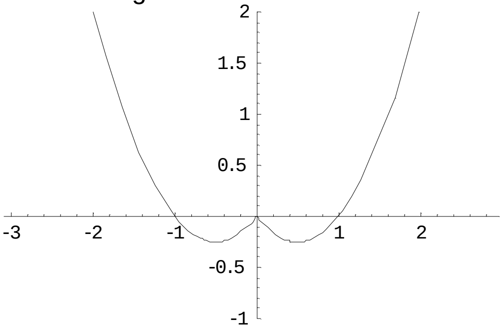
Si x < 0, f '(x) = 2x + 1.
f '(x) = 0, nos da 2x + 1 = 0, de donde x = -1/2 , que puede ser un posible extremo relativo.
Como f '(-1) = -1 < 0, **f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en el intervalo (-∞, -1/2).**

Como f '(- 0'1) = 0'8 > 0, **f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en el intervalo (- 1/2, 0).**

Por definición **x = - 1/2 es un mínimo relativo que vale f(- 1/2)** = $(-1/2)^2$ - |- 1/2| = **- 1/4**

Si x > 0, f '(x) = 2x – 1. Resolvemos f '(x) = 0 y veremos crecimiento, decrecimiento y extremos relativos.
f '(x) = 0, nos da 2x – 1 = 0, de donde x = 1/2 , que puede ser un posible extremo relativo.
Como f '(0'1) = - 0'8 < 0, **f(x) es estrictamente decreciente** $(\searrow)$ **en el intervalo (0,1/2).**
Por definición **x = 0 es un máximo relativo, *no derivable*, que vale f(0)** = $(0)^2$ - |0| **= 0.**
Como f '(1) = 1 > 0, **f(x) es estrictamente creciente** $(\nearrow)$ **en el intervalo (1/2,+∞).**
Por definición **x = 1/2 es un mínimo relativo que vale f(1/2) =** $(1/2)^2$ - |1/2| **= - 1/4.**

Aunque no lo piden, un esbozo de la gráfica de la función es



Ejercicio 2 opción B, modelo 1 del 2015

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)}$ para x ≠ 0 y x ≠ 1 y sea *F* la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto P(2,ln(2)) (ln denota logaritmo neperiano).
a) [0'5 puntos] Calcula la recta tangente a la gráfica de *F* en el punto *P*.
b) [2 puntos] Determina la función *F*.

Solución

Sea f la función definida por $f(x) = \dfrac{x^2 + 1}{x^2 \cdot (x - 1)}$ para x ≠ 0 y x ≠ 1 y sea *F* la primitiva de *f* cuya gráfica pasa por el punto P(2,ln(2)) (ln denota logaritmo neperiano).
a)

Calcula la recta tangente a la gráfica de *F* en el punto *P*.

Sabemos que como F(x) es una primitiva de f(x) entonces F(x) = ∫ f(x)dx y además F '(x) = f(x).

La recta tangente a la gráfica de *F* en el punto P(2,ln(2)) es y – F(2) = F '(2)·(x – 2).

F(2) = ln(2); F '(2) = f(2) = $\frac{(2)^2+1}{(2)^2\cdot(2-1)} = \frac{5}{4}$.

La recta tangente pedida es: $y - \ln(2) = \frac{5}{4}\cdot(x-2)$.

b)
Determina la función *F*.

Como F es una primitiva de f tenemos F(x) = ∫ f(x)dx = $\int \frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)}\,dx$ =

$$= \left\{\begin{matrix}\text{Integral racional con una}\\ \text{raiz simple y una doble}\end{matrix}\right\} = \int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1}\right)dx = \int\frac{A}{x}\,dx + \int\frac{B}{x^2}\,dx + \int\frac{C}{x-1}\,dx =$$

= $A\cdot\ln|x| - \frac{B}{x} + C\cdot\ln|x-1| + K$ = {***} = $\mathbf{-\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + K = F(x)}$, donde ln es el logaritmo neperiano.

= {***} Calculamos las constantes A, B y C.

$$\frac{x^2+1}{x^2\cdot(x-1)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{B}{x-1} = \frac{A(x)(x-1)+B(x-1)+C(x)^2}{x^2\cdot(x-1)}$$

Igualando numeradores tenemos
$x^2 + 1 = A(x)(x - 1) + B(x - 1) + C(x)^2$.
Para x = 0 tenemos 1 = B(-1), de donde *B = - 1*
Para x = 1 tenemos 2 = C(1)², de donde *C = 2*
Tomando x = -1 tenemos 2 = A(-1)(-2) + (-1)(-2) + (2)(-1)², de donde 2A = -2, luego *A = -1.*

Como F(x) pasa por el punto P(2,ln(2)) tenemos F(2) = ln(2), de donde:

ln(2) = $-\ln|2| + \frac{1}{2} + 2\ln|2-1| + K = -\ln|2| + \frac{1}{2} + 0 + K$, luego $K = 2\cdot\ln(2) - \frac{1}{2}$, y la primitiva pedida es $\mathbf{F(x) = -\ln|x| + \frac{1}{x} + 2\ln|x-1| + 2\cdot\ln(2) - \frac{1}{2}}$.

Ejercicio 3 opción B, modelo 1 del 2015

Considera las matrices A = $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

(a) [1'75 puntos] Halla la matriz X que verifica AX − B = I (I denota la matriz identidad de orden 3).
(b) [0'75 puntos] Calcula el determinante de la matriz $(A^2B^{-1})^{2015}$.

Solución

Considera las matrices A = $\begin{pmatrix}1&1&1\\1&2&3\\1&4&9\end{pmatrix}$ y B = $\begin{pmatrix}-1&1&1\\1&-1&1\\1&1&-1\end{pmatrix}$.

(a)
Halla la matriz X que verifica AX − B = I (I denota la matriz identidad de orden 3).

Como det(A) = |A| = $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 9 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 - F_1 \\ F_3 - F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 8 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = 1(8-6) = 2 \neq 0$, existe la matriz inversa $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$.

$AX - B = I \rightarrow AX = I + B$. Multiplicando ambos miembros por la izquierda por A^{-1} tenemos:
$A^{-1}AX = A^{-1}\cdot I + A^{-1}B \rightarrow I\cdot X = A^{-1}\cdot(I + B) \rightarrow$ $\mathbf{X = A^{-1}\cdot(I + B)}$.

Calculamos $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t)$. |A| = 2; $A^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$; $Adj(A^t) = \begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$, por tanto la matriz inversa es $A^{-1} = \dfrac{1}{|A|}\cdot Adj(A^t) = \dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}$.

$$I + B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

La matriz es $\mathbf{A^{-1}\cdot(I + B)} = \dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} 6 & -5 & 1 \\ -6 & 8 & -2 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix} -4 & 7 & 1 \\ 6 & -8 & 2 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{=} \mathbf{\begin{pmatrix} -2 & 7/2 & 1/2 \\ 3 & -4 & 1 \\ -1 & 3/2 & -1/2 \end{pmatrix}}$.

(b)
Calcula el determinante de la matriz $(A^2B^{-1})^{2015}$.

Sabemos que det(B) = 1/det(B), $\det(A^2) = (\det(A))^2$,

Calculamos primero det(B) = |B| = $\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ F_2 + F_1 \\ F_3 + F_1 \end{matrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{vmatrix} \begin{matrix} \text{Adjuntos} \\ \text{primera} \\ \text{columna} \end{matrix} = (-1)(0-4) = 4$.

$\mathbf{\det(A^2B^{-1})^{2015} =} (\det(A^2B^{-1}))^{2015} = (\det(A)\cdot\det(A)\cdot\dfrac{1}{\det(B)})^{2015} = (2\cdot2\cdot(1/4))^{2015} = 1^{2015} \mathbf{= 1.}$

Ejercicio 4 opción B, modelo 1 del 2015

Considera el punto P(1,0,-1) y la recta r dada por $\begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

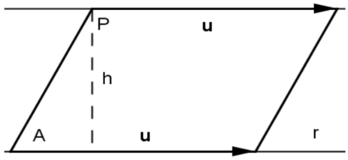
a) [1'5 puntos] Halla la distancia de P a r.
b) [1 punto] Determina la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r.

Solución

Considera el punto P(1,0,−1) y la recta r dada por $\begin{cases} x + y = 0 \\ z - 1 = 0 \end{cases}$

a)
Halla la distancia de P a r.

Calculamos la distancia del punto P a la recta “r”, utilizando el área de un paralelogramo. *La distancia pedida es la altura del paralelogramo*



Dada la recta "r" conocemos el punto A y el vector **u**. Por el punto P trazamos una recta paralela a la "r", y formamos el paralelogramo.
El área del paralelogramo determinado por los vectores **u** y **AP** es **||AP**x**u||** = base·altura =
= **||u||**·h, pero la altura "h" es d(P;r), luego d(P;r) = (**||AP**x**u||**)/(**||u||**) ("x" es el producto vectorial).

Ponemos "r", en forma vectorial, para lo cual $y = \lambda \in R$, de donde $x = -\lambda$, y la ecuación de la recta es $r \equiv (x,y,z) = (-\lambda,\lambda,1)$ con $\lambda \in R$. Un punto de "r" es A(0,0,1) y un vector director de "r" es **u** = (-1,1,0).

Punto P(1,0,-1). **AP** = (1,0,-2); **AP**x**u** = $\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ = **i**(0+2) - **j**(0-2) + **k**(1-0) = (2,2,1) ;

||APx**u||** = $\sqrt{(2^2+2^2+1^2)} = 3$;   **||u||** = $\sqrt{(1^2+1^2+0^2)} = \sqrt{(2)}$
Luego d(P;r) = (**||AP**x**u||**) / (**||u||**) = 3 / ($\sqrt{(2)}$) **= $(3\sqrt{(2)})/2$ u.l.**
b)
Determina la ecuación general del plano que pasa por P y contiene a r.

Formamos el haz de planos que determina la recta y la imponemos la condición de que pase por el punto P

Haz de planos $\pi_\lambda \equiv (x + y) + \lambda(z - 1) = 0$. Como $P(1,0,-1) \in \pi_\lambda \rightarrow (1 + 0) + \lambda(-1 - 1) = 0$, de donde $2\lambda = 1$, $\lambda = ½$, y **el plano pedido es** $\pi_{1/2} \equiv (x + y) + (1/2)(z - 1) = 0 \equiv$ **$2x + 2y + z -1 = 0$.**